

Der Satz von Hartman und Grobman und eine Anwendung in der Strömungsmechanik

Remo Kretschmann

12. November 2009

Danksagungen

Ich möchte mich an dieser Stelle sehr herzlich bei Prof. Dr. Jürgen Scheurle und Dr. Andreas Johann für ihre Unterstützung beim Entstehen dieser Arbeit bedanken.

Remo Kretschmann

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	2
1 Der Satz von Hartman und Grobman über Diffeomorphismen	6
2 Der Satz von Hartman und Grobman über Vektorfelder	13
3 Eine Anwendung in der Strömungsmechanik	20
3.1 Die Strömung einer idealen Flüssigkeit	20
3.2 2-dimensionale stationäre Strömungen in Polarkoordinaten . .	20
3.3 Eine spezielle Strömung	22
3.4 Berechnung eines Stromlinienbildes	25
3.5 Analyse der Stromlinien nahe der Gleichgewichte	27
Literaturverzeichnis	33

Einleitung

Der Satz von Hartman und Grobman spielt eine wichtige Rolle in der Theorie dynamischer Systeme. Er geht auf Philip Hartman (1960) und David M. Grobman (1959) zurück. Für ihre Artikel verweisen wir auf [Har1], [Har2] und [Gro].

Wir werden uns in dieser Arbeit mit zwei Versionen des Satzes beschäftigen. Zum einen mit einer Version über Diffeomorphismen. Sie findet Anwendung bei der Analyse diskreter dynamischer Systeme der Form

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

mit einem Diffeomorphismus $f : U \rightarrow U$ auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^m$. Der Satz beschreibt nun das Verhalten eines Diffeomorphismus in der Nähe eines hyperbolischen Fixpunktes. Ein Fixpunkt p eines Diffeomorphismus f heißt *hyperbolisch*, wenn das Differential von f im Punkt p keinen Eigenwert mit Betrag 1 besitzt.

Hartman und Grobman haben gezeigt, dass es für jeden hyperbolischen Fixpunkt p eines Diffeomorphismus f einen Homöomorphismus h gibt, der von einer Umgebung des Punktes p in eine Nullumgebung abbildet und

$$h \circ f = Df_p \circ h$$

erfüllt. Gibt es einen solchen Homöomorphismus, so heißen f und Df_p *lokal topologisch konjugiert*.

Anschaulich bedeutet das, dass sich ein Diffeomorphismus in der Umgebung eines hyperbolischen Fixpunktes qualitativ gleich verhält wie seine Linearisierung in der Umgebung des Ursprungs.

Zum anderen werden wir uns mit einer Version des Satzes über Vektorfelder beschäftigen. Sie handelt von kontinuierlichen dynamischen Systeme der Form

$$\dot{x} = u(x),$$

mit einem C^1 -Vektorfeld $u : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ auf einer offenen Menge $V \subseteq \mathbb{R}^m$. Hier beschreibt der Satz die Struktur der Orbits eines Vektorfeldes in der Nähe einer hyperbolischen Singularität. Eine Singularität p eines C^1 -Vektorfeldes

X heißt *hyperbolisch*, wenn das Differential von X im Punkt p keinen Eigenwert mit Realteil 0 besitzt.

Hartman und Grobman haben nun gezeigt, dass es für jede hyperbolische Singularität p eines C^1 -Vektorfeldes X einen Homöomorphismus h gibt, der auf einer Umgebung von p Orbits von X auf Orbits von DX_p abbildet und dabei ihre Orientierung erhält. Gibt es einen solchen Homöomorphismus, so heißen X und DX_p *lokal topologisch äquivalent*.

Anschaulich bedeutet das, dass die Orbits eines Vektorfeldes in der Umgebung einer hyperbolischen Singularität die gleiche Struktur haben wie die Orbits seiner Linearisierung in der Umgebung des Ursprungs.

Damit ergänzt der Satz von Hartman und Grobman das Tubular Flow Theorem (zu finden in Kapitel 2, §1 von [Pal]), das die Struktur der Orbits in der Umgebung eines regulären Punktes eines Vektorfeldes beschreibt.

Darüber hinaus werden wir den Satz von Hartman und Grobman bei der Analyse der Strömung einer idealen Flüssigkeit anwenden. Wir nehmen an, dass der Druck und die Temperatur der Flüssigkeit konstant sind, dass weder Reibung noch Oberflächenspannung auftritt und dass keine äußeren Kräfte auf die Flüssigkeit wirken. Das Strömungsfeld $v : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(t, x) \mapsto v(t, x)$ einer solchen idealen Flüssigkeit, das die Geschwindigkeit der Flüssigkeit in jedem Punkt x und zu jeder Zeit t festlegt, ist mit einem geeigneten Druckfeld $p \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ und einer Dichte $\rho > 0$ eine Lösung der *Euler-Gleichungen*

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0,$$

sowie der *Kontinuitätsgleichung*

$$\nabla \cdot v = 0.$$

Wir werden eine spezielle 2-dimensionale stationäre Strömung untersuchen. *Stationär* bedeutet, dass das Strömungsfeld v der Strömung keiner zeitlichen Änderung unterliegt. Die Stromlinien der Strömung sind die Bahnkurven der einzelnen Teilchen der Flüssigkeit. Wir erhalten sie als Orbits des autonomen Systems

$$\dot{x} = v(x),$$

mit dem auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^2$ definierten Strömungsfeld $v : U \rightarrow \mathbb{R}^2$. Multiplizieren wir v mit einem geeigneten integrierenden Faktor $m : U \rightarrow (0, \infty)$, so erhalten wir ein hamiltonsches System

$$\dot{x} = m(x)v(x).$$

Die Multiplikation mit einer positiven Funktion entspricht lokal einer Skalierung des Strömungsfeldes. Sowohl Form als auch Orientierung der Orbits

bleiben dabei im Vergleich zum ursprünglichen System unverändert. Das hamiltonsche System besitzt nun eine Hamilton-Funktion, die entlang von Orbits konstant ist. Das bedeutet, dass wir die Orbits des Strömungsfeldes, also die Stromlinien der Strömung, als Niveaumengen der Hamilton-Funktion darstellen können.

Die Singularitäten (Gleichgewichte) des Strömungsfeldes sind gerade die Stagnationspunkte der Strömung. Wir werden sehen, dass sie in unserem speziellen Fall hyperbolisch sind, so dass wir den Satz von Hartman und Grobman auf sie anwenden können.

Die Arbeit gliedert sich im Weiteren wie folgt:

In Kapitel 1 beweisen wir die Version des Satzes von Hartman und Grobman über Diffeomorphismen. Dabei gehen wir wie in Kapitel 2, §4 von [Pal] vor. Im Beweis des Satzes wird uns der Banach'sche Fixpunktsatz den gesuchten Homöomorphismus liefern, der f und Df_p lokal topologisch konjugiert.

In Kapitel 2 beweisen wir die Version des Satzes von Hartman und Grobman über Vektorfelder. Dabei gehen wir weiter wie in Kapitel 2, §4 von [Pal] vor. Im Beweis des Satzes gehen wir zunächst zu einem auf ganz $\mathbb{R}^m$ definierten Vektorfeld Y über, das auf einer Nullumgebung mit X identisch ist. Dann wenden wir die Erkenntnisse aus Kapitel 1 an, um den gesuchten Homöomorphismus zu erhalten, der auf dieser Nullumgebung Orbits von Y auf Orbits von DX_p abbildet.

In Kapitel 3 wenden wir dann den Satz von Hartman und Grobman bei der Analyse der Strömung einer idealen Flüssigkeit an. Wir zeigen zunächst, dass das Strömungsfeld dieser speziellen Strömung zusammen mit einem geeignet gewählten Druckfeld und einer konstanten Dichte eine Lösung der Euler-Gleichungen sowie der Kontinuitätsgleichung ist. Dann ermitteln wir mit Hilfe der oben erwähnten Hamilton-Funktion ein Stromlinienbild der Strömung. Schließlich demonstrieren wir, welche Erkenntnisse wir mit Hilfe des Satzes von Hartman und Grobman über das Verhalten der Strömung in der Nähe ihrer Stagnationspunkte gewinnen können.

Kapitel 1

Der Satz von Hartman und Grobman über Diffeomorphismen

Wir werden den Satz für C^r -Diffeomorphismen auf einer differenzierbaren Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ formulieren. Seien M und N im Folgenden m -dimensionale differenzierbare Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$.

Definition 1.1. Eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ heißt C^r -Diffeomorphismus, falls f bijektiv ist und sowohl f als auch f^{-1} C^r -Abbildungen mit $r \geq 1$ sind. Die Menge aller C^r -Diffeomorphismen, die von M nach N abbilden, bezeichnen wir mit $\text{Diff}^r(M, N)$. Sind M und N identisch, so schreiben wir kurz $\text{Diff}^r(M)$.

Die wesentliche Voraussetzung für den Satz ist, dass der betrachtete Fixpunkt hyperbolisch ist.

Definition 1.2. Ein Isomorphismus $A \in \text{GL}(\mathbb{R}^m)$ bzw. $A \in \text{GL}(T_p M)$ mit $p \in M$ heißt *hyperbolisch*, wenn das Spektrum von A und der Einheitskreis $S^1 \subset \mathbb{C}$ disjunkt sind, d.h. wenn A keinen Eigenwert mit Betrag 1 besitzt. Sei $p \in M$ ein Fixpunkt von $f \in \text{Diff}^r(M)$, d. h. $f(p) = p$. p heißt *hyperbolisch*, wenn Df_p hyperbolisch ist, wobei Df_p das Differential von f im Punkt p bezeichnet.

Nun definieren wir, was wir darunter verstehen wollen, dass sich zwei Diffeomorphismen qualitativ gleich verhalten. Dazu führen wir den Begriff der Konjugation ein.

Definition 1.3. Seien $f \in \text{Diff}^r(M)$ und $g \in \text{Diff}^r(N)$. f und g heißen (*topologisch*) *konjugiert*, wenn es einen Homöomorphismus $h : M \rightarrow N$ gibt, so dass gilt:

$$h \circ f = g \circ h \quad \text{auf } M.$$

Seien außerdem $p \in M$ und $q \in N$. f und g heißen *lokal (topologisch) konjugiert* in p und q , wenn es Umgebungen $V \subset M$ von p und $U \subset N$ von q sowie einen Homöomorphismus $h : U \rightarrow V$ gibt, so dass gilt:

$$h \circ f = g \circ h \quad \text{auf } U.$$

Damit können wir die Diffeomorphismen-Version des Satzes formulieren.

Satz 1.4 (von Hartman und Grobman über Diffeomorphismen). *Sei $p \in M$ ein hyperbolischer Fixpunkt von $f \in \text{Diff}^r(M)$. Dann ist f lokal konjugiert zu Df_p in p und 0.*

Beweis. Zunächst begründen wir, warum wir ohne Einschränkung annehmen können, dass $f \in \text{Diff}^r(U, V)$ ist, wobei U und V offene Teilmenge des $\mathbb{R}^m$ sind, und dass 0 hyperbolischer Fixpunkt von f ist. Dazu betrachten wir eine lokale Parametrisierung um p ,

$$x : W \subset \mathbb{R}^m \rightarrow X \subset M$$

mit $x(0) = p$. Da f stetig ist, können wir eine Umgebung $Y \subset X$ von p wählen, so dass $Z := f(Y) \subset X$. Nun definieren wir

$$\tilde{f} := x^{-1} \circ f \circ x,$$

das von $U := x^{-1}(Y)$ nach $V := x^{-1}(Z)$ abbildet.

Falls $\tilde{h} : V \rightarrow \tilde{h}(V) \subset \mathbb{R}^m$ ein Homöomorphismus ist, der $\tilde{f}$ und $D\tilde{f}_0 = (Dx_0)^{-1} \circ Df_p \circ Dx_0$ lokal konjugiert, dann ist $h : Z \rightarrow h(Z) \subset TM_p$,

$$h := Dx_0 \circ \tilde{h} \circ x^{-1}$$

ein Homöomorphismus, der f und Df_p lokal konjugiert, denn es gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{h}\tilde{f} &= D\tilde{f}_0\tilde{h} && \text{auf } V \\ \Leftrightarrow \tilde{h}x^{-1}fx &= (Dx_0)^{-1}Df_pDx_0\tilde{h} && \text{auf } V \\ \Leftrightarrow Dx_0\tilde{h}x^{-1}f &= Df_pDx_0\tilde{h}x^{-1} && \text{auf } Z \\ \Leftrightarrow hf &= Df_ph && \text{auf } Z \end{aligned}$$

Bevor wir mit dem Beweis fortfahren, benötigen wir eine Reihe von Lemmata, aus denen der Satz dann unmittelbar folgt.

Lemma 1.5. *Sei E ein Banachraum, $L \in \mathcal{L}(E)$ mit $\|L\| < 1$ und $G \in \mathcal{L}(E)$ ein Isomorphismus mit $\|G^{-1}\| < 1$. Dann gilt:*

(1) $\text{id} + L$ ist ein Isomorphismus und

$$\|(\text{id} + L)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|L\|},$$

(2) $\text{id} + G$ ist ein Isomorphismus und

$$\|(\text{id} + G)^{-1}\| \leq \frac{\|G^{-1}\|}{1 - \|G^{-1}\|}.$$

Beweis. (1) Sei $y \in E$ und $u : E \rightarrow E$ definiert durch $u(x) = y - Lx$.
Wegen $\|L\| < 1$ gilt für alle $x_1, x_2 \in E$:

$$\|u(x_1) - u(x_2)\| = \|L(x_2 - x_1)\| < \|x_1 - x_2\|.$$

u ist also eine Kontraktion. Nach dem Banach'schen Fixpunktsatz hat u genau einen Fixpunkt $x \in E$. Für diesen Fixpunkt gilt $x = u(x) = y - Lx$.
Daraus folgt, dass es genau ein $x \in E$ gibt mit

$$(\text{id} + L)x = x + Lx = y.$$

$\text{id} + L$ ist also bijektiv. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \|x\| &= \|y - Lx\| \leq \|y\| + \|L\| \|x\| \\ \Leftrightarrow (1 - \|L\|) \|x\| &\leq \|y\| \\ \Leftrightarrow \|(\text{id} + L)^{-1}y\| = \|x\| &\leq \frac{\|y\|}{1 - \|L\|} \end{aligned}$$

Da y beliebig war, folgt daraus

$$\|(\text{id} + L)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|L\|}.$$

(2) G ist nach Voraussetzung invertierbar. Damit gilt

$$\text{id} + G = G(\text{id} + G^{-1}).$$

Wegen $\|G^{-1}\| < 1$ ist $\text{id} + G^{-1}$ nach (1) ebenfalls invertierbar, und es gilt

$$(\text{id} + G)^{-1} = (\text{id} + G^{-1})^{-1} G^{-1}.$$

Mit (1) folgt daraus

$$\|(\text{id} + G)^{-1}\| \leq \|(\text{id} + G^{-1})^{-1}\| \|G^{-1}\| \leq \frac{\|G^{-1}\|}{1 - \|G^{-1}\|}. \quad \square$$

Definition 1.6. Bezeichne $C_b^0(\mathbb{R}^m)$ den Banachraum der stetigen, beschränkten Abbildungen von $\mathbb{R}^m$ nach $\mathbb{R}^m$, versehen mit der Supremumsnorm.

Lemma 1.7. Sei $A \in \text{GL}(\mathbb{R}^m)$ ein hyperbolischer Isomorphismus. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $\varphi_1, \varphi_2 \in C_b^0(\mathbb{R}^m)$ gilt: Falls φ_1 und φ_2 Lipschitz-stetig sind, und ihre Lipschitz-Konstanten kleiner oder gleich ε sind, dann sind $A + \varphi_1$ und $A + \varphi_2$ zueinander konjugiert.

Beweis. Wir zeigen, dass es einen Homöomorphismus $h : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ der Form $h = \text{id} + u$ mit $u \in C_b^0(\mathbb{R}^m)$ gibt, der $h(A + \varphi_1) = (A + \varphi_2)h$ erfüllt. Diese Bedingung lässt sich umformen zu

$$\begin{aligned} & (\text{id} + u)(A + \varphi_1) = (A + \varphi_2)(\text{id} + u) \\ \Leftrightarrow & A + \varphi_1 + u(A + \varphi_1) = A + \varphi_2 + u(A + \varphi_2) \\ \Leftrightarrow & Au - u(A + \varphi_1) = \varphi_1 - \varphi_2(\text{id} + u). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Wir zeigen, dass $B(v) = Av - v(A + \varphi_1)$ ein Homöomorphismus ist. Dann zeigen wir, dass $\mu(v) = B^{-1}(\varphi_1 - \varphi_2(\text{id} + v))$ für genügend kleines ε eine Kontraktion mit dem eindeutigen Fixpunkt u ist. u erfüllt Bedingung (1.1), denn

$$\begin{aligned} & u = \mu(u) = B^{-1}(\varphi_1 - \varphi_2(\text{id} + u)) \\ \Leftrightarrow & Au - u(A + \varphi_1) = Bu = \varphi_1 - \varphi_2(\text{id} + u). \end{aligned}$$

Zunächst zeigen wir, dass $A + \varphi_1$ für $\varepsilon < \|A^{-1}\|^{-1}$ bijektiv ist. Sei $y \in \mathbb{R}^m$ und $w : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $w(x) = A^{-1}(y - \varphi_1(x))$. Dann gilt für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^m$:

$$\begin{aligned} \|w(x_1) - w(x_2)\| &= \|A^{-1}(\varphi_1(x_2) - \varphi_1(x_1))\| \\ &\leq \|A^{-1}\| \varepsilon \|x_1 - x_2\| < \|x_1 - x_2\|. \end{aligned}$$

Nach dem Banach'schen Fixpunktsatz hat w genau einen Fixpunkt $x \in \mathbb{R}^m$. Für diesen Fixpunkt gilt $x = w(x) = A^{-1}(y - \varphi_1(x))$. Daraus folgt, dass es genau ein $x \in \mathbb{R}^m$ gibt mit

$$(A + \varphi_1)x = Ax + \varphi_1(x) = y.$$

$A + \varphi_1$ ist also bijektiv.

Jetzt zeigen wir, dass $B : C_b^0(\mathbb{R}^m) \rightarrow C_b^0(\mathbb{R}^m)$,

$$B(u) = Au - u(A + \varphi_1)$$

ein Homöomorphismus ist. Dazu definieren wir $L : C_b^0(\mathbb{R}^m) \rightarrow C_b^0(\mathbb{R}^m)$,

$$L(u) = -A^{-1}u(A + \varphi_1),$$

sowie $\tilde{A} : C_b^0(\mathbb{R}^m) \rightarrow C_b^0(\mathbb{R}^m)$, $\tilde{A}(u) = Au$. Damit gilt

$$Bu = \tilde{A}(\text{id} + L)u.$$

L ist stetig, denn für alle $u \in C_b^0(\mathbb{R}^m)$ gilt:

$$\begin{aligned} \|Lu\| &\leq \|A^{-1}\| \|u(A + \varphi_1)\|_\infty = \|A^{-1}\| \|u\|_\infty \\ \Leftrightarrow & \|L\| \leq \|A^{-1}\| \end{aligned}$$

Damit ist auch B stetig:

$$\|B\| \leq \|\tilde{A}\| (\|\text{id}\| + \|L\|) = \|A\| (1 + \|A^{-1}\|) < \infty.$$

Nach Proposition 2.9 und Proposition 2.10 in Kapitel 2, §2 von [Pal] gibt es eine eindeutige Zerlegung des $\mathbb{R}^m = E^s \oplus E^u$, so dass E^s und E^u unter A invariante Teilräume des $\mathbb{R}^m$ sind, und für $A^s = A|_{E^s}$ und $A^u = A|_{E^u}$ gilt

$$\|A^s\| < 1, \quad \|(A^u)^{-1}\| < 1.$$

Damit lässt sich $C_b^0(\mathbb{R}^m)$ zerlegen in $C_b^0(\mathbb{R}^m) = C_b^0(\mathbb{R}^m, E^s) \oplus C_b^0(\mathbb{R}^m, E^u)$, d.h. $u \in C_b^0(\mathbb{R}^m)$ besitzt eine eindeutige Darstellung $u = u^s + u^u$ mit $u^s \in C_b^0(\mathbb{R}^m, E^s)$ und $u^u \in C_b^0(\mathbb{R}^m, E^u)$. Da E^s auch unter A^{-1} invariant ist, gilt für alle $u^s \in C_b^0(\mathbb{R}^m, E^s)$:

$$Lu_s = A^{-1} \underbrace{u^s(A + \varphi_1)}_{\in C_b^0(\mathbb{R}^m, E^s)} \in C_b^0(\mathbb{R}^m, E^s).$$

$C_b^0(\mathbb{R}^m, E^s)$ ist also invariant unter L und damit auch unter $\text{id} + L$. Ebenso folgt die Invarianz von $C_b^0(\mathbb{R}^m, E^u)$ unter L und unter $\text{id} + L$. Damit lässt sich L schreiben als $Lu = L^s u^s + L^u u^u$, wobei $L^s = L|_{C_b^0(\mathbb{R}^m, E^s)}$ und $L^u = L|_{C_b^0(\mathbb{R}^m, E^u)}$. Analog lässt sich $(\text{id} + L)$ schreiben als $(\text{id} + L)u = (\text{id} + L)^s u^s + (\text{id} + L)^u u^u$, mit $(\text{id} + L)^s = (\text{id} + L)|_{C_b^0(\mathbb{R}^m, E^s)}$ und $(\text{id} + L)^u = (\text{id} + L)|_{C_b^0(\mathbb{R}^m, E^u)}$.

Für alle $u^u \in C_b^0(\mathbb{R}^m, E^u)$ gilt:

$$\begin{aligned} L^u(u^u) &= -A^{-1}u^u(A + \varphi_1) = -(A^u)^{-1}u^u(A + \varphi_1) \\ \Rightarrow \quad \|L^u(u^u)\| &\leq \|(A^u)^{-1}\| \|u^u(A + \varphi_1)\|_\infty = \|(A^u)^{-1}\| \|u^u\|_\infty \\ \Leftrightarrow \quad \|L^u\| &\leq \|(A^u)^{-1}\| < 1. \end{aligned}$$

Nach Lemma 1.5 (1) ist $(\text{id} + L)^u = \text{id}^u + L^u$ invertierbar mit

$$\|((\text{id} + L)^u)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|(A^u)^{-1}\|} < \infty.$$

Die Inverse von $L^s(u^s) = -(A^s)^{-1}u^s(A + \varphi_1)$ ist gegeben durch $(L^s)^{-1}(v^s) = -A^s v^s (A + \varphi_1)^{-1}$, und es gilt

$$\|(L^s)^{-1}\| \leq \|A^s\| < 1.$$

Nach Lemma 1.5 (2) ist $(\text{id} + L)^s = \text{id}^s + L^s$ invertierbar mit

$$\|((\text{id} + L)^s)^{-1}\| \leq \frac{\|A^s\|}{1 - \|A^s\|} < \infty.$$

Damit gilt für alle $u \in C_b^0(\mathbb{R}^m)$:

$$\begin{aligned} \|(\text{id} + L)^{-1}u\| &= \|((\text{id} + L)^{-1})^s u^s + ((\text{id} + L)^{-1})^u u^u\| \\ &\leq \|((\text{id} + L)^{-1})^s\| \|u^s\| + \|((\text{id} + L)^{-1})^u\| \|u^u\| \\ \Leftrightarrow \quad \|(\text{id} + L)^{-1}\| &\leq \|((\text{id} + L)^{-1})^s\| + \|((\text{id} + L)^{-1})^u\| < \infty \end{aligned}$$

Die Inverse von $\tilde{A}$ ist gegeben durch $\tilde{A}^{-1}(u) = A^{-1}u$. Damit ist B invertierbar, und es gilt

$$\|B^{-1}\| \leq \|(\text{id} + L)^{-1}\| \|A^{-1}\| < \infty.$$

B ist also ein Homöomorphismus. Damit können wir $\mu : C_b^0(\mathbb{R}^m) \rightarrow C_b^0(\mathbb{R}^m)$ definieren,

$$\mu(u) = B^{-1}(\varphi_1 - \varphi_2(\text{id} + u)).$$

μ ist für $\varepsilon < \|B^{-1}\|^{-1}$ eine Kontraktion, denn für alle $u_1, u_2 \in C_b^0(\mathbb{R}^m)$ gilt:

$$\begin{aligned} \|\mu(u_1) - \mu(u_2)\| &= \|B^{-1}(\varphi_2(\text{id} + u_2) - \varphi_2(\text{id} + u_1))\| \\ &\leq \|B^{-1}\| \varepsilon \|u_2 - u_1\| < \|u_1 - u_2\|. \end{aligned}$$

Nach dem Banach'schen Fixpunktsatz hat μ genau einen Fixpunkt. Sei u dieser Fixpunkt, dann gilt:

$$\begin{aligned} u &= \mu(u) = B^{-1}(\varphi_1 - \varphi_2(\text{id} + u)) \\ \Leftrightarrow \quad Au - u(A + \varphi_1) &= Bu = \varphi_1 - \varphi_2(\text{id} + u). \end{aligned}$$

$\text{id} + u$ erfüllt also $(\text{id} + u)(A + \varphi_1) = (A + \varphi_2)(\text{id} + u)$. Es bleibt zu zeigen, dass $\text{id} + u$ ein Homöomorphismus ist.

Sei $v \in C_b^0(\mathbb{R}^m)$ die eindeutige Lösung von

$$(\text{id} + v)(A + \varphi_2) = (A + \varphi_1)(\text{id} + v).$$

Es gilt

$$\begin{aligned} (\text{id} + u)(\text{id} + v)(A + \varphi_2) &= (\text{id} + u)(A + \varphi_1)(\text{id} + v) \\ &= (A + \varphi_2)(\text{id} + u)(\text{id} + v). \end{aligned}$$

Außerdem gilt $\text{id}(A + \varphi_2) = (A + \varphi_2)\text{id}$. Mit $w := v + u(\text{id} + v) \in C_b^0(\mathbb{R}^m)$ lässt sich $(\text{id} + u)(\text{id} + v)$ schreiben als

$$(\text{id} + u)(\text{id} + v) = \text{id} + v + u(\text{id} + v) = \text{id} + w.$$

Da die Lösung von $(\text{id} + w)(A + \varphi_2) = (A + \varphi_1)(\text{id} + w)$ eindeutig ist, folgt

$$(\text{id} + u)(\text{id} + v) = \text{id}.$$

Analog kann man zeigen, dass $(\text{id} + v)(\text{id} + u) = \text{id}$ gilt.

Da sowohl $\text{id} + u$ als auch $\text{id} + v = (\text{id} + u)^{-1}$ stetig sind, ist $\text{id} + u$ ein Homöomorphismus. $\square$

Lemma 1.8. Seien $V, W \subset \mathbb{R}^m$ offen und 0 ein hyperbolischer Fixpunkt von $f \in \text{Diff}^r(V, W)$. Sei ferner $\varepsilon > 0$. Dann gibt es eine Nullumgebung U und ein Lipschitz-stetiges $\varphi \in C_b^0(\mathbb{R}^m)$, so dass

$$f = Df_0 + \varphi \quad \text{auf } U,$$

und die Lipschitz-Konstante von φ kleiner oder gleich ε ist.

Beweis. Definiere $\psi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\psi = f - Df_0$ auf V und $\psi = 0$ außerhalb von V . Es gilt $\psi(0) = 0$ und $D\psi_0 = 0$. Da $D\psi_x$ stetig in x ist, können wir δ so wählen, dass für alle $x \in B_\delta := \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\| < \delta\}$ gilt:

$$\|D\psi_x\| < \frac{\varepsilon}{2K}.$$

Wir wählen δ außerdem so klein, dass $B_\delta \subset V$.

Sei $K > 2$ und $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^∞ -Funktion mit $\alpha(\mathbb{R}) \subseteq [0, 1]$, $\alpha(t) = 1$ für $t \leq \frac{1}{2}$, $\alpha(t) = 0$ für $t \geq 1$ und $|\alpha'(t)| < K$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Definiere $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$,

$$\varphi(x) = \alpha\left(\frac{\|x\|}{\delta}\right)\psi(x).$$

Dann gilt $\varphi = 0$ auf $\mathbb{R}^m \setminus B_\delta$ und $Df_0 + \varphi = Df_0 + \psi = f$ auf $B_{\frac{\delta}{2}} =: U$.

Es bleibt zu zeigen, dass φ Lipschitz-stetig ist. Für $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^m \setminus B_\delta$ ist $\|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\| = 0 < \varepsilon$. Sei also ohne Einschränkung $x_1 \in B_\delta$ und $x_2 \in \mathbb{R}^m$. Dann gilt mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung:

$$\begin{aligned} \|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\| &= \left\| \alpha\left(\frac{\|x_1\|}{\delta}\right)\psi(x_1) - \alpha\left(\frac{\|x_2\|}{\delta}\right)\psi(x_2) \right\| \\ &= \left\| \left(\alpha\left(\frac{\|x_1\|}{\delta}\right) - \alpha\left(\frac{\|x_2\|}{\delta}\right) \right) \psi(x_1) + \alpha\left(\frac{\|x_2\|}{\delta}\right)(\psi(x_1) - \psi(x_2)) \right\| \\ &\leq \left\| \int_{\frac{\|x_1\|}{\delta}}^{\frac{\|x_2\|}{\delta}} \alpha'(t) dt \right\| \left\| x_1 \int_0^1 D\psi_{tx_1} dt \right\| + 1 \left\| (x_1 - x_2) \int_0^1 D\psi_{x_2+t(x_1-x_2)} dt \right\| \\ &\leq \frac{\|x_2\| - \|x_1\|}{\delta} K \|x_1\| \frac{\varepsilon}{2K} + \|x_1 - x_2\| \frac{\varepsilon}{2K} \leq \varepsilon \|x_1 - x_2\|. \end{aligned}$$

Die Lipschitz-Konstante von φ ist also kleiner oder gleich ε . $\square$

Fortsetzung des Beweises von Satz 1.4. Sei ε wie in Lemma 1.7 gewählt, so dass für alle $\varphi \in C_b^0(\mathbb{R}^m)$ gilt: Falls die Lipschitz-Konstante von φ kleiner oder gleich ε ist, dann sind Df_0 und $Df_0 + \varphi$ zueinander konjugiert.

Nach Lemma 1.8 gibt es eine Nullumgebung U und ein $\varphi \in C_b^0(\mathbb{R}^m)$, so dass $f = Df_0 + \varphi$ auf U gilt, und die Lipschitz-Konstante von φ kleiner oder gleich ε ist.

Df_0 und $Df_0 + \varphi$ sind also zueinander konjugiert. Und da f und $Df_0 + \varphi$ auf U identisch sind, sind damit Df_0 und $f = Df_0 + \varphi$ lokal zueinander konjugiert. $\square$

Kapitel 2

Der Satz von Hartman und Grobman über Vektorfelder

Wir formulieren den Satz für C^r -Vektorfelder auf einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^m$. Die Aussagen lassen sich jedoch auf die gleiche Weise wie in Kapitel 1 auf differenzierbare Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ übertragen.

Definition 2.1. Bezeichne $\mathfrak{X}^r(U)$ für eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^m$ und $r \geq 1$ den Raum aller C^r -Vektorfelder, die von U nach $\mathbb{R}^m$ abbilden.

Definition 2.2. Sei $X \in \mathfrak{X}^r(\mathbb{R}^m)$ und $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, x) &= X(\varphi(t, x)) & \forall t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^m, \\ \varphi(0, x) &= x & \forall x \in \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

Den Fluss des Vektorfeldes X bezeichnen wir für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $X_t := \varphi(t, \cdot)$.

Wieder ist die entscheidende Voraussetzung für den Satz, dass die Singularität hyperbolisch ist. Die Definition der Hyperbolizität für die Singularität eines Vektorfeldes unterscheidet sich jedoch leicht von der für den Fixpunkt eines Diffeomorphismus.

Definition 2.3. Ein lineares Vektorfeld $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ heißt *hyperbolisch*, wenn das Spektrum von L und die imaginäre Achse $i\mathbb{R}$ disjunkt sind, d.h. wenn L keinen Eigenwert mit Realteil 0 besitzt.

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $p \in U$ eine Singularität von $X \in \mathfrak{X}^r(U)$, d. h. $X(p) = 0$. p heißt *hyperbolisch*, falls DX_p ein hyperbolisches lineares Vektorfeld ist.

Nun definieren wir, was wir darunter verstehen wollen, dass die Orbits von zwei Vektorfeldern die selbe Struktur haben. Dazu führen wir den Begriff der topologischen Äquivalenz, sowie den etwas schärferen Begriff der Konjugation ein.

Definition 2.4. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen. Seien ferner $X, Y \in \mathfrak{X}^r(U)$ und $p, q \in U$. X und Y heißen *lokal (topologisch) äquivalent* in p und q , falls es Umgebungen $V \subset U$ von p und $W \subset U$ von q sowie einen Homöomorphismus $h : V \rightarrow W$ mit $h(p) = q$ gibt, der Orbits von X auf Orbits von Y abbildet und dabei ihre Orientierung erhält.

Definition 2.5. Seien $X, Y \in \mathfrak{X}^r(\mathbb{R}^m)$. X und Y heißen zueinander *(topologisch) konjugiert*, falls es einen Homöomorphismus $h : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ gibt, der Orbits von X auf Orbits von Y abbildet und dabei den Parameter t erhält, d.h. falls für alle $p \in \mathbb{R}^m$ und $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$h(X_t(p)) = Y_t(h(p)).$$

Zwei Vektorfelder, die zueinander konjugiert sind, sind also insbesondere lokal topologisch äquivalent.

Bevor wir die Vektorfeld-Version des Satzes formulieren, begründen wir zunächst, warum wir ohne Einschränkung annehmen können, dass sich die Singularität des Vektorfeldes X im Ursprung befindet. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^m$ und $p \in U$ eine Singularität von $X \in \mathfrak{X}^r(U)$. Dann ist $V := U - p$ eine offene Nullumgebung und der Ursprung ist eine Singularität des C^r -Vektorfeldes $Y : V \rightarrow \mathbb{R}^m$, $Y(x) = X(x + p)$. Da Y bis auf eine Verschiebung mit X identisch ist, sind X und Y lokal topologisch äquivalent.

Satz 2.6 (von Hartman und Grobman über Vektorfelder). *Sei $V \subseteq \mathbb{R}^m$ eine offene Nullumgebung, $X \in \mathfrak{X}(V)$ und 0 eine hyperbolische Singularität von X . Dann sind X und DX_0 lokal topologisch äquivalent in 0 .*

Lemma 2.7 (von Gronwall). *Seien $u, v \in C([a, b], \mathbb{R})$, $\alpha \geq 0$ und es gelte $u(t) \geq 0, v(t) \geq 0$ und*

$$u(t) \leq \alpha + \int_a^t u(s)v(s)ds \quad \forall t \in [a, b]$$

Dann gilt

$$u(t) \leq \alpha \exp \left(\int_a^t v(s)ds \right) \quad \forall t \in [a, b].$$

Beweis. Sei zunächst $\alpha > 0$. Definiere $\omega : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\omega(t) = \alpha + \int_a^t u(s)v(s)ds$. Dann gilt $\omega(a) = \alpha$ und $\omega(t) \geq \alpha > 0$ für alle $t \in [a, b]$. Weiter gilt $\omega'(t) = u(t)v(t) \leq \omega(t)v(t)$ für alle $t \in [a, b]$. Integrieren liefert

$$\ln \frac{\omega(t)}{\alpha} = \ln |\omega(t)| - \ln |\omega(a)| = \int_a^t \frac{\omega'(s)}{\omega(s)} \leq \int_a^t v(s)ds \quad \forall t \in [a, b].$$

Damit gilt

$$u(t) \leq \omega(t) \leq \alpha \exp \left(\int_a^t v(s)ds \right) \quad \forall t \in [a, b].$$

Sei nun $\alpha = 0$. Dann gilt für alle $\alpha_1 > 0$:

$$u(t) \leq \alpha_1 \exp \left(\int_a^t v(s) ds \right).$$

Daraus folgt, dass $u = 0$ auf $[a, b]$. Damit ist die Ungleichung für $\alpha = 0$ erfüllt. $\square$

Lemma 2.8. Sei $Y: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ ein Lipschitz-stetiges C^r -Vektorfeld mit Lipschitz-Konstante K und $Y(0) = 0$. Dann ist der Fluss von Y auf ganz $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ definiert und es gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}^m$:

$$\|Y_t(x) - Y_t(y)\| \leq e^{K|t|} \|x - y\|$$

Beweis. Angenommen der Fluss wäre nicht auf ganz $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ definiert. Dann gäbe es ein $x \in \mathbb{R}$ und o.E. ein maximales Existenzintervall (a, b) der Integralkurve von Y durch den Punkt x mit $b < \infty$. Sei $\varphi: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^m$ die Integralkurve durch den Punkt x :

$$\varphi(t) = x + \int_0^t Y(\varphi(s)) ds$$

Dann gilt für alle $t \geq 0$:

$$\|\varphi(t)\| \leq \|x\| + \int_0^t \|Y(\varphi(s))\| ds \leq \|x\| + \int_0^t K \|\varphi(s)\| ds$$

Mit dem Lemma von Gronwall erhalten wir

$$\|\varphi(t)\| \leq e^{K|t|} \|x\| \leq e^{Kb} \|x\| \quad \text{falls } t \geq 0.$$

Sei $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in (a, b) mit $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = b$. Betrachte die Folge $(\varphi(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$, deren Folgeglieder alle in der abgeschlossenen Kugel mit Mittelpunkt 0 und Radius $M = e^{Kb} \|x\|$ liegen. Aus

$$\varphi(t_n) - \varphi(t_m) = \int_{t_m}^{t_n} Y(\varphi(s)) ds$$

folgt

$$\|\varphi(t_n) - \varphi(t_m)\| \leq KM |t_n - t_m|.$$

Somit ist $\varphi(t_n)$ eine Cauchy-Folge und konvergiert gegen einen Punkt $y \in \mathbb{R}^m$. Der Fluss von Y ist um y lokal definiert, so dass wir die Integralkurve φ über b hinaus erweitern können, im Widerspruch zur Annahme. Daher ist der Fluss von Y auf ganz $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ definiert. Wegen

$$Y_t(x) - Y_t(y) = x - y + \int_0^t \left(Y(Y_s(x)) - Y(Y_s(y)) \right) ds$$

gilt für alle $t \geq 0$:

$$\|Y_t(x) - Y_t(y)\| \leq \|x - y\| + \int_0^t K \|Y_s(x) - Y_s(y)\| ds.$$

Nach dem Lemma von Gronwall gilt dann für alle $t \geq 0$:

$$\|Y_t(x) - Y_t(y)\| \leq e^{K|t|} \|x - y\|.$$

Für $t \leq 0$ erhalten wir den selben Ausdruck, indem wir das Vektorfeld $-Y$ betrachten. $\square$

Sei $V \subseteq \mathbb{R}^m$ im Folgenden stets eine offene Nullumgebung.

Lemma 2.9. *Sei $V \subseteq \mathbb{R}^m$ eine offene Nullumgebung, und $X \in \mathfrak{X}^r(V)$ mit $X(0) = 0$. Sei ferner $L := DX_0$ und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein Vektorfeld $Y \in \mathfrak{X}^r(\mathbb{R}^m)$ mit folgenden Eigenschaften:*

- (1) *Der von Y induzierte Fluss ist auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ definiert.*
- (2) *$Y = L$ außerhalb einer Kugel B_l .*
- (3) *Es gibt eine offene Nullumgebung $U \subset V$, so dass $X = Y$ auf U gilt.*
- (4) *Sei $\varphi_t := Y_t - L_t$. Dann gibt es ein $M > 0$, so dass $\|\varphi_t\| \leq M$ für alle $t \in [-2, 2]$ und die Lipschitz-Konstante von φ_1 ist kleiner oder gleich ε . Außerdem gilt $D(\varphi_1)_0 = 0$ und damit $D(Y_1)_0 = e^L = L_1$.*

Beweis. $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ definiert durch $\psi = X - L$ ist eine C^r -Abbildung mit $\psi(0) = 0$ und $D\psi_0 = 0$. Wegen der Stetigkeit von $D\psi_x$ können wir ein $l \in (0, 1)$ wählen, so dass $B_l \subset V$ und für alle $x \in B_l$ gilt:

$$\|D\psi_x\| < \frac{\delta}{2K}.$$

Sei $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^∞ -Funktion mit $\alpha(\mathbb{R}) \subseteq [0, 1]$, $\alpha(t) = 1$ für $|t| \leq \frac{l}{2}$ und $\alpha(t) = 0$ für $|t| \geq l$. Weil $I := [\frac{l}{2}, l]$ kompakt ist und $\alpha'(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R} \setminus I$, gibt es ein $K > \frac{2}{l}$, so dass für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|\alpha'(t)| < K.$$

Definiere $\tilde{\varphi} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\tilde{\varphi}(x) = \alpha(\|x\|)\psi(x)$ für $x \in V$ und $\tilde{\varphi}(x) = 0$ sonst. Es gilt $\tilde{\varphi} \in C^r$, $\tilde{\varphi} = \psi$ auf $B_{l/2}$ und $\tilde{\varphi} = 0$ auf $\mathbb{R} \setminus B_l$. $\tilde{\varphi}$ ist Lipschitz-stetig, denn für $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^m \setminus B_l$ ist $\|\tilde{\varphi}(x_1) - \tilde{\varphi}(x_2)\| = 0$, und für $x_1 \in B_l$ und $x_2 \in \mathbb{R}^m$ gilt:

$$\begin{aligned} \|\tilde{\varphi}(x_1) - \tilde{\varphi}(x_2)\| &= \|\alpha(\|x_1\|)\psi(x_1) - \alpha(\|x_2\|)\psi(x_2)\| \\ &= \|(\alpha(\|x_1\|) - \alpha(\|x_2\|))\psi(x_1) + \alpha(\|x_2\|)(\psi(x_1) - \psi(x_2))\| \\ &\leq |\alpha(\|x_1\|) - \alpha(\|x_2\|)| \|\psi(x_1)\| + |\alpha(\|x_2\|)| \|\psi(x_1) - \psi(x_2)\| \\ &\leq K \left| \|x_1\| - \|x_2\| \right| \frac{\delta}{2K} \|x_1\| + 1 \frac{\delta}{2K} \|x_1 - x_2\| \\ &\leq \|x_1 - x_2\| \frac{\delta}{2} l + \frac{l\delta}{2} \|x_1 - x_2\| < \delta \|x_1 - x_2\|. \end{aligned}$$

Sei $Y : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ das durch $Y = L + \tilde{\varphi}$ definierte Vektorfeld. Y ist Lipschitz-stetig und es gilt $Y \in C^r$. Damit ist nach Lemma 2.8 der Fluss von Y auf ganz $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ definiert (1).

Außerdem gilt $Y = L$ außerhalb von B_l (2) und $Y = X$ auf $U := B_{l/2}$ (3). Y_t ist für $t \in [-2, 2]$ auf B_l beschränkt, denn nach Lemma 2.8 gilt für alle $x \in B_l$:

$$\|Y_t(x)\| \leq e^{C|t|}\|x\| \leq e^{2C}l,$$

wobei C die Lipschitz-Konstante von Y ist. L_t ist für $t \in [-2, 2]$ auf B_l ebenfalls beschränkt, denn nach Lemma 2.8 gilt für alle $x \in B_l$:

$$\|L_t(x)\| \leq e^{\|L\||t|}\|x\| \leq e^{2\|L\|}l.$$

Damit ist φ_t für $t \in [-2, 2]$ beschränkt, denn außerhalb von B_l ist $Y = L$ und auf B_l gilt $\|\varphi_t\| \leq \|Y_t\| + \|L_t\|$.

Mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt für alle $x \in \mathbb{R}^m$:

$$\begin{aligned} \varphi_t(x) &= Y_t(x) - L_t(x) \\ &= Y_0(x) - L_0(x) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial s} Y_s(x) ds - \int_0^t \frac{\partial}{\partial s} L_s(x) ds \\ &= x - x + \int_0^t Y(Y_s(x)) ds - \int_0^t L(L_s(x)) ds \\ &= \int_0^t L(Y_s(x)) ds + \int_0^t \tilde{\varphi}(Y_s(x)) ds - \int_0^t L(L_s(x)) ds \\ &= \int_0^t \tilde{\varphi}(Y_s(x)) ds + \int_0^t L(\varphi_s(x)) ds. \end{aligned}$$

Mit Lemma 2.8 gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}^m$, $t \in [-2, 2]$:

$$\begin{aligned} \|\varphi_t(x) - \varphi_t(y)\| &\leq \int_0^t \|\tilde{\varphi}(Y_s(x)) - \tilde{\varphi}(Y_s(y))\| ds + \int_0^t \|L(\varphi_s(x) - \varphi_s(y))\| ds \\ &\leq \int_0^t \delta e^{C|s|} \|x - y\| ds + \int_0^t \|L\| \|\varphi_s(x) - \varphi_s(y)\| ds \\ &\leq 2\delta e^{2C} \|x - y\| + \int_0^t \|L\| \|\varphi_s(x) - \varphi_s(y)\| ds. \end{aligned}$$

Mit dem Lemma 2.7 von Gronwall folgt daraus für alle $x, y \in \mathbb{R}^m$, $t \in [-2, 2]$:

$$\|\varphi_t(x) - \varphi_t(y)\| \leq 2\delta e^{2C} \|x - y\| e^{\int_0^t \|L\| ds} \leq 2\delta e^{2C} e^{2\|L\|} \|x - y\|.$$

Für $\delta < \frac{1}{2} e^{-2C} e^{-2\|L\|} \varepsilon$ ist die Lipschitz-Konstante von φ_1 also kleiner als ε . Es bleibt zu zeigen, dass $D(\varphi_1)_0 = 0$, d.h. dass es für alle $\rho > 0$ ein $r > 0$ gibt, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^m$ mit $\|x\| < r$ gilt:

$$\|\varphi_1(x)\| < \rho \|x\|.$$

Da $D\tilde{\varphi}_0 = 0$ können wir ein $r > 0$ wählen, so dass $\|\tilde{\varphi}(z)\| < \eta \|z\|$ für $\|z\| < r$ mit $\eta < \rho e^{-C} e^{-\|L\|}$. Mit Lemma 2.8 gilt für $\|x\| < r$:

$$\begin{aligned}\|\varphi_1(x)\| &\leq \int_0^1 \|\tilde{\varphi}(Y_s(x))\| ds + \int_0^1 \|L(\varphi_s(x))\| ds \\ &\leq \eta e^C \|x\| + \int_0^1 \|L\| \|\varphi_s(x)\| ds.\end{aligned}$$

Mit dem Lemma 2.7 von Gronwall folgt daraus, dass

$$\|\varphi_1(x)\| \leq \eta e^C \|x\| e^{\|L\|} < \rho \|x\|.$$

Aus $D\tilde{\varphi}_0 = 0$ folgt mit $L_t(x) = e^{Lt}x$ unmittelbar, dass

$$D(Y_1)_0 = D(\varphi_1)_0 + D(L_1)_0 = e^L = L_1. \quad \square$$

Behauptung 2.10. *Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ die Eigenwerte von $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Dann besitzt e^L genau die Eigenwerte $e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}$.*

Ein Beweis der Behauptung ist zu finden in Proposition 2.7 in Kapitel 2, §2 von [Pal].

Beweis von Satz 2.6. Zunächst betrachten wir den Isomorphismus e^L mit $L := DX_0$. Da L hyperbolisch ist, liegen die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ von L in $\mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}$. Nach Behauptung 2.10 besitzt e^L genau die Eigenwerte $e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}$. Diese liegen in $\exp(\mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}) = \mathbb{C} \setminus S^1$, d.h. e^L ist hyperbolisch.

Sei nun ε wie in Lemma 1.7 gewählt, so dass für alle $\varphi \in C_b^0(\mathbb{R}^m)$ gilt: Falls die Lipschitz-Konstante von φ kleiner oder gleich ε ist, dann sind e^L und $e^L + \varphi$ zueinander konjugiert.

Sei weiter $Y : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ ein Vektorfeld wie in Lemma 2.9, so dass $\varphi_1 \in C_b^0(\mathbb{R}^m)$ und die Lipschitz-Konstante von φ_1 kleiner oder gleich ε ist. Nach Lemma 1.7 sind $L_1 = e^L$ und $Y_1 = L_1 + \varphi_1$ zueinander konjugiert, d.h. es gibt einen Homöomorphismus h der Form $h = \text{id} + u$ mit $u \in C_b^0(\mathbb{R}^m)$, der $hY_1 = L_1h$ erfüllt.

Wir zeigen jetzt, dass Y und L zueinander konjugiert sind. Dazu definieren wir $H : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$,

$$H = \int_0^1 L_{-t} h Y_t dt,$$

und zeigen, dass für alle $s \in \mathbb{R}$ gilt:

$$HY_s = L_s H.$$

Betrachten wir zunächst $s \in [0, 1]$. Es gilt

$$\begin{aligned}L_{-s} H Y_s &= L_{-s} \left(\int_0^1 L_{-t} h Y_t dt \right) Y_s = \int_0^1 L_{-(t+s)} h Y_{t+s} dt \\ &= \int_0^{1-s} L_{-(t+s)} h Y_{t+s} dt + \int_{1-s}^1 L_{-(t+s-1)} (L_{-1} h Y_1) Y_{t+s-1} dt.\end{aligned}$$

Jetzt setzen wir im linken Integral $v = t + s$ und im rechten $v = t + s - 1$:

$$L_{-s}HY_s = \int_s^1 L_{-v}hY_v dv + \int_0^s L_{-v}hY_v dv = H.$$

Für $s \in \mathbb{R}$ betrachten wir eine Zerlegung $s = n + r$ mit $n \in \mathbb{Z}$ und $r \in [0, 1)$. Aus $L_{-1}HY_1 = H$ folgt induktiv $L_{-m}HY_m = H$ für alle $m \in \mathbb{Z}$. Damit gilt für alle $s \in \mathbb{R}$:

$$L_{-s}HY_s = L_{-r}L_{-n}HY_nY_r = L_{-r}HY_r = H.$$

Außerdem ist $H - \text{id} \in C_b^0(\mathbb{R}^m)$, denn es gilt für alle $x \in \mathbb{R}^m$:

$$\begin{aligned} \|(H - \text{id})x\| &\leq \int_0^1 \|(L_{-t}(\text{id} + u)(L_t + \varphi_t) - \text{id})x\| dt \\ &= \int_0^1 \|(\text{id} + L_{-t}(\varphi_t + uY_t) - \text{id})x\| dt \\ &\leq \int_0^1 \|L_{-t}\| (\|\varphi_t(x)\| + \|u(Y_t(x))\|) dt \\ &\leq e^{\|L\|} (M + \|u\|). \end{aligned}$$

Weil die Lösung von $(\text{id} + u)Y_1 = L_1(\text{id} + u)$ für $u \in C_b^0(\mathbb{R}^m)$ eindeutig ist, folgt daraus $H = h$. H ist also ein Homöomorphismus, der Y und L konjugiert. Insbesondere sind Y und L lokal topologisch äquivalent in 0.

Auf der Nullumgebung U aus Lemma 2.9 gilt $X = Y$, so dass id_U Orbits von X auf Orbits von Y abbildet und ihre Orientierung erhält. Also sind X und Y lokal topologisch äquivalent in 0 und damit auch X und $L = DX_0$. $\square$

Kapitel 3

Eine Anwendung in der Strömungsmechanik

3.1 Die Strömung einer idealen Flüssigkeit

Wir untersuchen nun die Strömung einer idealen Flüssigkeit. Wir nehmen an, dass der Druck und die Temperatur der Flüssigkeit konstant sind, dass weder Reibung noch Oberflächenspannung auftritt und dass keine äußeren Kräfte auf die Flüssigkeit wirken. Wir beschreiben die Strömung eines Fluids durch ihr Strömungsfeld $v : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(t, x) \mapsto v(t, x)$, das die Geschwindigkeit des Fluids in jedem Punkt x und zu jeder Zeit t festlegt.

Definition 3.1. Unter den obigen Voraussetzungen ist $v \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ genau dann das Strömungsfeld einer Strömung, wenn ein Druckfeld $p \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ und eine Dichte $\rho > 0$ existieren, so dass die *Euler-Gleichungen*

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0,$$

sowie die *Kontinuitätsgleichung*

$$\nabla \cdot v = 0$$

erfüllt sind. Eine Strömung, deren Strömungsfeld die Kontinuitätsgleichung erfüllt, nennt man *inkompressibel*.

Eine Herleitung der Euler-Gleichungen und der Kontinuitätsgleichung ist in Abschnitt 1.1. von [Mar] zu finden.

3.2 2-dimensionale stationäre Strömungen in Polarkoordinaten

Die spezielle Strömung, die wir untersuchen wollen ist eine 2-dimensionale stationäre Strömung in Polarkoordinaten.

Definition 3.2. Eine Strömung ist genau dann *stationär*, wenn ihr Strömungsfeld v keiner zeitlichen Änderung unterliegt, d.h. wenn gilt

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 0.$$

Wir zeigen zunächst wie in Satz 5.2.1 in [Aul], wie wir eine in Polarkoordinaten gegebene Strömung in kartesischen Koordinaten betrachten können und umgekehrt. Haben wir das Strömungsfeld $(u_x, u_y) : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ einer 2-dimensionalen stationären Strömung in kartesischen Koordinaten (x, y) gegeben, so definieren wir das zugehörige Strömungsfeld in Polarkoordinaten $(v_r, v_\varphi) : (0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ durch

$$\begin{aligned} v_r(r, \varphi) &= u_x(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \cos \varphi + u_y(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \sin \varphi, \\ v_\varphi(r, \varphi) &= -u_x(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \sin \varphi + u_y(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \cos \varphi. \end{aligned}$$

Sei nun $(r, \varphi) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Lösung des autonomen Systems

$$\dot{r} = v_r(r, \varphi), \quad \dot{\varphi} = \frac{1}{r} v_\varphi(r, \varphi), \quad (3.1)$$

mit der Anfangsbedingung

$$r(0) = r_0, \quad \varphi(0) = \varphi_0.$$

Dann ist $(x, y) : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$\begin{aligned} x(t) &= r(t) \cos \varphi(t), \\ y(t) &= r(t) \sin \varphi(t), \end{aligned}$$

eine Lösung des autonomen Systems

$$\dot{x} = u_x(x, y), \quad \dot{y} = u_y(x, y). \quad (3.2)$$

und genügt der Anfangsbedingung

$$\begin{aligned} x(0) &= r_0 \cos \varphi_0 =: x_0, \\ y(0) &= r_0 \sin \varphi_0 =: y_0, \end{aligned}$$

denn es gilt

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r} \cos \varphi - \dot{\varphi} r \sin \varphi = v_r(r, \varphi) \cos \varphi - v_\varphi(r, \varphi) \sin \varphi \\ &= u_x(x, y) \cos^2 \varphi + u_y(x, y) \sin \varphi \cos \varphi \\ &\quad + u_x(x, y) \sin^2 \varphi - u_y(x, y) \cos \varphi \sin \varphi \\ &= u_x(x, y), \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\dot{y} &= \dot{r} \sin \varphi + \dot{\varphi} r \cos \varphi = v_r(r, \varphi) \sin \varphi + v_\varphi(r, \varphi) \cos \varphi \\
&= u_x(x, y) \cos \varphi \sin \varphi + u_y(x, y) \sin^2 \varphi \\
&\quad - u_x(x, y) \sin \varphi \cos \varphi + u_y(x, y) \cos^2 \varphi \\
&= u_y(x, y).
\end{aligned}$$

Besitzt (3.1) also für alle Anfangswerte $(r_0, \varphi_0) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}$ eine Lösung, so besitzt (3.2), weil sich jeder Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ in Polarkoordinaten darstellen lässt, für alle Anfangswerte $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ebenfalls eine Lösung.

Darüber hinaus ist $(x, y, z) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $z(t) = z_0$ eine Lösung des autonomen Systems

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= v_x(x, y, z) := u_x(x, y), \\
\dot{y} &= v_y(x, y, z) := u_y(x, y), \\
\dot{z} &= v_z(x, y, z) := 0,
\end{aligned}$$

die die Anfangsbedingung

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad z(0) = z_0$$

erfüllt. Insbesondere gilt

$$\frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_y}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial x} = \frac{\partial v_z}{\partial y} = \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

Auf diese Weise können wir eine 2-dimensionale Strömung auch in 3 Dimensionen betrachten.

3.3 Eine spezielle Strömung

Betrachten wir das in Polarkoordinaten $(r, \varphi) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}$ definierte Strömungsfeld $v = (v_r, v_\varphi)$ mit

$$\begin{aligned}
v_r(r, \varphi) &= \left(1 - \frac{1}{r^2}\right) \cos \varphi, \\
v_\varphi(r, \varphi) &= -\left(1 + \frac{1}{r^2}\right) \sin \varphi + \frac{4}{r}.
\end{aligned}$$

Wir stellen fest, dass $v_r(r, \varphi) = v_r(r, \varphi + 2\pi m)$ und $v_\varphi(r, \varphi) = v_\varphi(r, \varphi + 2\pi m)$ für alle $m \in \mathbb{Z}$. D.h. v_r und v_φ sind 2π -periodisch in φ , so dass das zugehörige Strömungsfeld in kartesischen Koordinaten $\tilde{v} = (v_x, v_y, v_z)$ wohldefiniert ist. Zunächst zeigen wir, dass v tatsächlich eine Strömung beschreibt, d.h. dass $\tilde{v}$

eine Lösung der Euler-Gleichungen und der Kontinuitätsgleichung ist. Dazu setzen wir

$$\rho = 1 \quad \text{und} \quad p = -\frac{1}{2}(\tilde{v} \cdot \tilde{v}).$$

Nach Gleichung 6 auf S. 100 von [Bou] gilt

$$\frac{1}{2}\nabla(\tilde{v} \cdot \tilde{v}) = (\tilde{v} \cdot \nabla)\tilde{v} + \tilde{v} \times (\nabla \times \tilde{v}).$$

Da v stationär ist, folgt daraus

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + (\tilde{v} \cdot \nabla)\tilde{v} + \frac{1}{\rho}\nabla p = (\tilde{v} \cdot \nabla)\tilde{v} - \frac{1}{2}\nabla(\tilde{v} \cdot \tilde{v}) = -\tilde{v} \times (\nabla \times \tilde{v}),$$

und die Euler-Gleichungen vereinfachen sich zu

$$\tilde{v} \times (\nabla \times \tilde{v}) = 0.$$

Betrachte die Koordinatentransformation $k : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus [0, \infty)$,

$$k(r, \varphi) = \begin{pmatrix} x(r, \varphi) \\ y(r, \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$Dk(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r}(r, \varphi) & \frac{\partial x}{\partial \varphi}(r, \varphi) \\ \frac{\partial y}{\partial r}(r, \varphi) & \frac{\partial y}{\partial \varphi}(r, \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix},$$

und damit

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial r}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} &= D(k^{-1})(x, y) = (Dk(r, \varphi))^{-1} \\ &= \frac{1}{r} \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial \varphi}(r, \varphi) & -\frac{\partial x}{\partial \varphi}(r, \varphi) \\ -\frac{\partial y}{\partial r}(r, \varphi) & \frac{\partial x}{\partial r}(r, \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\frac{1}{r} \sin \varphi & \frac{1}{r} \cos \varphi \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Da wir k für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ auf $(0, \infty) \times (\alpha, 2\pi + \alpha)$ betrachten können, gilt (3.3) für alle $\varphi \in \mathbb{R}$.

Die partiellen Ableitungen von v_r und v_φ sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial r}(r, \varphi) &= \frac{2}{r^3} \cos \varphi, & \frac{\partial v_r}{\partial \varphi}(r, \varphi) &= -\left(1 - \frac{1}{r^2}\right) \sin \varphi, \\ \frac{\partial v_\varphi}{\partial r}(r, \varphi) &= \frac{2}{r^3} \sin \varphi - \frac{4}{r^2}, & \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}(r, \varphi) &= -\left(1 + \frac{1}{r^2}\right) \cos \varphi. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_y}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial(v_y \circ k)}{\partial r}(r, \varphi) \frac{\partial r}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial(v_y \circ k)}{\partial \varphi}(r, \varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) \\
&= \frac{\partial}{\partial r}(v_r(r, \varphi) \sin \varphi + v_\varphi(r, \varphi) \cos \varphi) \cos \varphi \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial \varphi}(v_r(r, \varphi) \sin \varphi + v_\varphi(r, \varphi) \cos \varphi) \left(-\frac{1}{r} \sin \varphi\right) \\
&= \left(\frac{\partial v_r}{\partial r}(r, \varphi) \sin \varphi + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r}(r, \varphi) \cos \varphi\right) \cos \varphi + \left(\frac{\partial v_r}{\partial \varphi}(r, \varphi) \sin \varphi\right. \\
&\quad \left.+ v_r(r, \varphi) \cos \varphi + \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}(r, \varphi) \cos \varphi - v_\varphi(r, \varphi) \sin \varphi\right) \left(-\frac{1}{r} \sin \varphi\right) \\
&= \left(\frac{\partial v_r}{\partial r}(r, \varphi) \cos \varphi - \frac{\partial v_\varphi}{\partial r}(r, \varphi) \sin \varphi\right) \sin \varphi + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r}(r, \varphi) \\
&\quad + \left(\frac{\partial v_r}{\partial \varphi}(r, \varphi) \cos \varphi - v_r(r, \varphi) \sin \varphi - \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}(r, \varphi) \sin \varphi\right. \\
&\quad \left.- v_\varphi(r, \varphi) \cos \varphi\right) \frac{1}{r} \cos \varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi}(r, \varphi) + \frac{1}{r} v_\varphi(r, \varphi) \\
&= \frac{\partial}{\partial r}(v_r(r, \varphi) \cos \varphi - v_\varphi(r, \varphi) \sin \varphi) \sin \varphi \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial \varphi}(v_r(r, \varphi) \cos \varphi - v_\varphi(r, \varphi) \sin \varphi) \frac{1}{r} \cos \varphi \\
&\quad + \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}(r, \varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi}(r, \varphi) + \frac{1}{r} v_\varphi(r, \varphi)\right) \\
&= \frac{\partial(v_x \circ k)}{\partial r}(r, \varphi) \frac{\partial r}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial(v_x \circ k)}{\partial \varphi}(r, \varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) \\
&\quad + \frac{2}{r^3} \sin \varphi - \frac{4}{r^2} + \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r^3}\right) \sin \varphi - \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^3}\right) \sin \varphi + \frac{4}{r^2} \\
&= \frac{\partial v_x}{\partial y}(x, y).
\end{aligned}$$

Damit sind die Euler-Gleichungen erfüllt:

$$\tilde{v} \times (\nabla \times \tilde{v}) = \tilde{v} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \tilde{v} \times 0 = 0.$$

Nun zeigen wir, dass v eine inkompressible Strömung beschreibt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_x}{\partial x} &= \frac{\partial(v_x \circ k)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial(v_x \circ k)}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\
&= \frac{\partial}{\partial r} (v_r \cos \varphi - v_\varphi \sin \varphi) \cos \varphi \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial \varphi} (v_r \cos \varphi - v_\varphi \sin \varphi) \left(-\frac{1}{r} \sin \varphi \right) \\
&= \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \cos \varphi - \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \sin \varphi \right) \cos \varphi \\
&\quad + \left(\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \cos \varphi - v_r \sin \varphi - \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \sin \varphi - v_\varphi \cos \varphi \right) \left(-\frac{1}{r} \sin \varphi \right) \\
&= \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \sin \varphi + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \cos \varphi \right) (-\sin \varphi) + \frac{\partial v_r}{\partial r} \\
&\quad + \left(\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \sin \varphi + v_r \cos \varphi + \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \cos \varphi - v_\varphi \sin \varphi \right) \left(-\frac{1}{r} \cos \varphi \right) \\
&\quad + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \\
&= \frac{\partial}{\partial r} (v_r \sin \varphi + v_\varphi \cos \varphi) (-\sin \varphi) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial \varphi} (v_r \sin \varphi + v_\varphi \cos \varphi) \left(-\frac{1}{r} \cos \varphi \right) \\
&\quad + \frac{2}{r^3} \cos \varphi + \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r^3} \right) \cos \varphi - \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^3} \right) \cos \varphi \\
&= -\frac{\partial(v_y \circ k)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} - \frac{\partial(v_y \circ k)}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial v_y}{\partial y}
\end{aligned}$$

Damit ist auch die Kontinuitätsgleichung erfüllt:

$$\nabla \cdot \tilde{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

3.4 Berechnung eines Stromlinienbildes

Nun wollen wir die Strömung näher untersuchen. Betrachten wir das autonome System

$$\begin{aligned}
\dot{r} &= v_r(r, \varphi) =: f(r, \varphi), \\
\dot{\varphi} &= \frac{1}{r} v_\varphi(r, \varphi) =: g(r, \varphi).
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Zunächst zeigen wir wie im Beweis von Satz 2.4.6 in [Aul], dass v_r und v_φ lokal Lipschitz-stetig sind. Die partiellen Ableitungen von f und g sind

gegeben durch

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial r}(r, \varphi) &= \frac{2}{r^3} \cos \varphi, & \frac{\partial f}{\partial \varphi}(r, \varphi) &= -\left(1 - \frac{1}{r^2}\right) \sin \varphi, \\ \frac{\partial g}{\partial r}(r, \varphi) &= \left(\frac{1}{r^2} + \frac{3}{r^4}\right) \sin \varphi - \frac{8}{r^3}, & \frac{\partial g}{\partial \varphi}(r, \varphi) &= -\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^3}\right) \cos \varphi.\end{aligned}$$

Insbesondere sind sie stetig auf $(0, \infty) \times \mathbb{R}$. Damit sind $\|Df\|$ und $\|Dg\|$ auf jeder kompakten Teilmenge $K \subset (0, \infty) \times \mathbb{R}$ beschränkt. Zu jedem Punkt $p_0 \in (0, \infty) \times \mathbb{R}$ gibt es eine kompakte konvexe Umgebung $K = \{p \in (0, \infty) \times \mathbb{R} \mid \|p - p_0\| \leq \varepsilon\}$, auf der nach dem Shranksatz gilt:

$$\begin{aligned}\|f(p) - f(q)\| &\leq \|Df\| \cdot \|p - q\|, \\ \|g(p) - g(q)\| &\leq \|Dg\| \cdot \|p - q\|.\end{aligned}$$

Damit sind f und g lokal Lipschitz-stetig, und nach dem globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz besitzt (3.4) zu jedem Anfangswert $(r_0, \varphi_0) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}$ genau eine Lösung auf einem maximalen Existenzintervall $I_{\max}(r_0, \varphi_0)$.

Definition 3.3. Ein ebenes autonomes System

$$\dot{x} = f(x, y), \quad \dot{y} = g(x, y)$$

mit einer auf einer offenen Menge $D \subseteq \mathbb{R}^2$ lokal Lipschitz-stetigen rechten Seite heißt *hamiltonsches System*, wenn es eine C^1 -Funktion $H : D \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit der Eigenschaft

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) = -g(x, y) \quad \text{und} \quad \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) = f(x, y) \quad \text{für alle } (x, y) \in D.$$

H heißt *Hamilton-Funktion* des Systems.

Unter geeigneten Differenzierbarkeitsvoraussetzungen gilt für ein hamiltonsches System

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial g}{\partial y}.$$

(3.4) ist zunächst kein hamiltonsches System, denn

$$\frac{\partial f}{\partial r}(2, 0) = \frac{1}{4} \neq \frac{5}{8} = -\frac{\partial g}{\partial \varphi}(2, 0).$$

Das mit dem integrierenden Faktor $m : (0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$, $m(r, \varphi) = r$ multiplizierte System

$$\begin{aligned}\dot{r} &= m(r, \varphi) f(r, \varphi) = r v_r(r, \varphi), \\ \dot{\varphi} &= m(r, \varphi) g(r, \varphi) = v_\varphi(r, \varphi)\end{aligned} \tag{3.5}$$

ist jedoch hamiltonsch. Die Funktion $H : (0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$H(r, \varphi) = \left(r - \frac{1}{r}\right) \sin \varphi - 4 \ln r$$

besitzt die gewünschten Eigenschaften

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial r}(r, \varphi) &= \left(1 + \frac{1}{r^2}\right) \sin \varphi - \frac{4}{r} = -v_\varphi(r, \varphi), \\ \frac{\partial H}{\partial \varphi}(r, \varphi) &= \left(r - \frac{1}{r}\right) \cos \varphi = rv_r(r, \varphi), \end{aligned}$$

und ist damit eine Hamilton-Funktion von (3.5).

Wir zeigen nun wie im Beweis von Satz 5.1.4 in [Aul], dass H entlang der Lösungskurven des ursprünglichen Systems (3.4) konstant ist. Sei $(r, \varphi) : I_{\max} \rightarrow (0, \infty) \times \mathbb{R}$ die Lösungskurve zum Anfangswert $(r_0, \varphi_0) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}$ und $I_{\max} = I_{\max}(r_0, \varphi_0)$ das Existenzintervall der Lösung.

Dann ist $H(r(t), \varphi(t)) = H(r_0, \varphi_0)$ für alle $t \in I_{\max}$, denn auf $I_{\max}$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} H(r(t), \varphi(t)) &= \frac{\partial H}{\partial r}(r(t), \varphi(t)) \dot{r}(t) + \frac{\partial H}{\partial \varphi}(r(t), \varphi(t)) \dot{\varphi}(t) \\ &= \left(-m(r(t), \varphi(t))g(r(t), \varphi(t))\right) f(r(t), \varphi(t)) \\ &\quad + \left(m(r(t), \varphi(t))f(r(t), \varphi(t))\right) g(r(t), \varphi(t)) = 0. \end{aligned}$$

Damit ist insbesondere die gesamte Lösungskurve (r, φ) in der Niveaumenge $H^{-1}(H(r_0, \varphi_0))$ enthalten. Da dies für alle $(r_0, \varphi_0) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}$ gilt, und (3.4) wie wir gesehen haben für alle $(r_0, \varphi_0) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}$ eine Lösung besitzt, sind die Niveaumengen von H Vereinigungen von Lösungskurven von (3.4). Auf diese Weise erhalten wir durch die Niveaumengen von H ein Phasenportrait von (3.4) und damit ein Stromlinienbild der Strömung.

3.5 Analyse der Stromlinien nahe der Gleichwichte

Nun untersuchen wir die Strömung auf Stagnationspunkte, d.h. wir bestimmen die Singularitäten des Vektorfelds $X : (0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $X := (f, g)$. Wir werden zeigen, dass diese hyperbolisch sind, so dass das Vektorfeld X nach dem Satz von Hartman und Grobman in der Nähe seiner Singularitäten lokal topologisch äquivalent zu seiner Linearisierung ist. Das bedeutet, dass die Orbits von X in einer Umgebung einer Singularität, und damit auch die Stromlinien, die selbe Struktur haben wie die Orbits der Linearisierung von X . Da f und g 2π -periodisch in φ sind, genügt es $(r, \varphi) \in (0, \infty) \times [0, 2\pi)$ zu betrachten. Hier gilt

$$f(r, \varphi) = \left(1 - \frac{1}{r^2}\right) \cos \varphi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\} \text{ oder } r = 1,$$

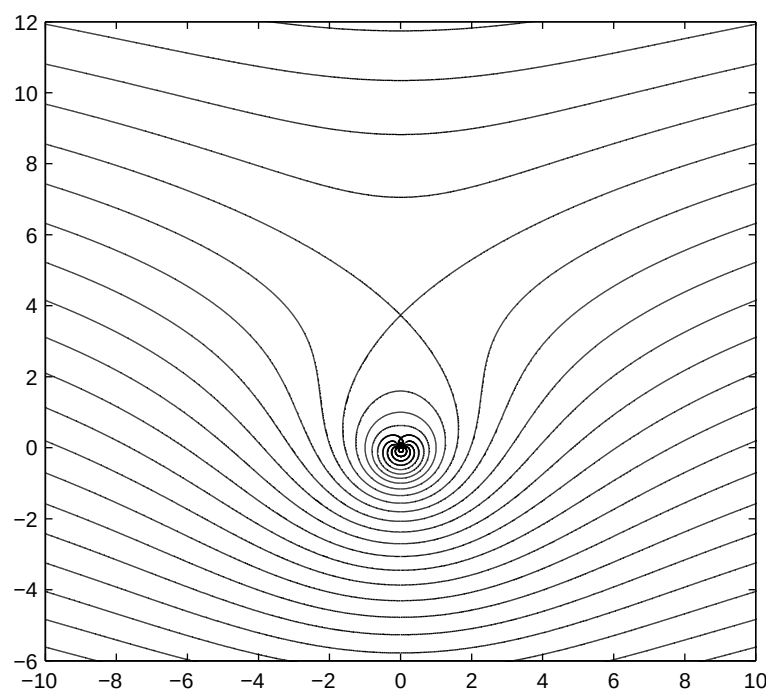


Abbildung 3.1: Niveaumengen der Hamilton-Funktion H

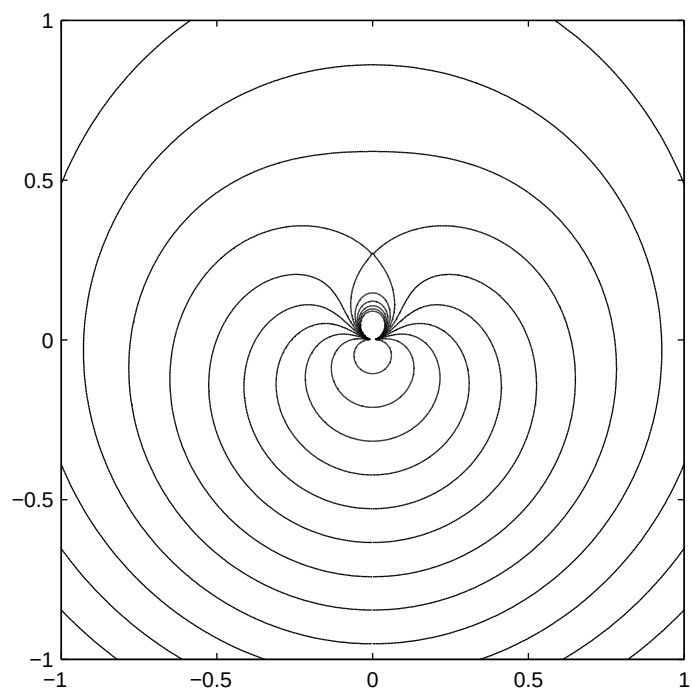


Abbildung 3.2: Niveaumengen von H (kleinerer Ausschnitt)

sowie

$$\begin{aligned} g(r, \varphi) = -\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^3}\right) \sin \varphi + \frac{4}{r^2} = 0 &\Leftrightarrow -(r^2 + 1) \sin \varphi + 4r = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{4r}{r^2 + 1} = \sin \varphi. \end{aligned}$$

Für $r = 1$ und $\varphi \in \mathbb{R}$ ist $g(r, \varphi) \neq 0$, denn

$$\frac{4r}{r^2 + 1} = 2 > 1 \geq \sin \varphi.$$

Für $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ und $r > 0$ ist ebenfalls $g(r, \varphi) \neq 0$, denn

$$\frac{4r}{r^2 + 1} > 0 > -1 = \sin \varphi.$$

Für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und $r > 0$ gilt:

$$\begin{aligned} g(r, \varphi) = 0 &\Leftrightarrow \frac{4r}{r^2 + 1} = \sin \varphi = 1 \\ &\Leftrightarrow r^2 - 4r + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (r - 2)^2 = 3 \\ &\Leftrightarrow r \in \{2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}\} \end{aligned}$$

$X = (f, g)$ besitzt also die Singularitäten

$$(r_1, \varphi_1) := \left(2 - \sqrt{3}, \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{und} \quad (r_2, \varphi_2) := \left(2 + \sqrt{3}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Um herauszufinden, ob die Singularitäten hyperbolisch sind, betrachten wir die Linearisierung von X für $\varphi = \varphi_1 = \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ und $r > 0$,

$$DX(r, \frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{r^2} - 1 \\ \frac{1}{r^2} + \frac{3}{r^4} - \frac{8}{r^3} & 0 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} 0 & a(r) \\ b(r) & 0 \end{pmatrix},$$

und bestimmen ihre Eigenwerte. Für $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt

$$\det(DX(r, \frac{\pi}{2}) - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & a(r) \\ b(r) & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - a(r)b(r).$$

$DX(r, \frac{\pi}{2})$ besitzt also die Eigenwerte

$$\lambda_1(r) := -\sqrt{a(r)b(r)} \quad \text{und} \quad \lambda_2(r) := \sqrt{a(r)b(r)} = -\lambda_1(r).$$

Nun berechnen wir die Eigenwerte für $r = r_1$, d. h. wir betrachten die Singularität (r_1, φ_1) . Es gilt $r_1 + r_2 = 4$ und

$$r_1 \cdot r_2 = (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1.$$

Damit berechnen wir

$$\begin{aligned}
a(r_1) &= \frac{1}{r_1^2} - 1 = r_2^2 - r_1 r_2 = r_2(r_2 - r_1), \\
b(r_1) &= \frac{1}{r_1^2} + \frac{3}{r_1^4} - \frac{8}{r_1^3} = r_2^2 + 3r_2^4 - 8r_2^3 = r_2^2(1 + r_2(3r_2 - 8)) \\
&= r_2^2(r_1 r_2 + r_2(3r_2 - 2(r_1 + r_2))) = r_2^2(r_2(r_2 - r_1)) \\
&= \frac{1}{r_1^2} a(r_1).
\end{aligned}$$

$DX(r_1, \varphi_1)$ besitzt die Eigenwerte

$$\begin{aligned}
\lambda_2(r_1) &= \sqrt{a(r_1)b(r_1)} = \frac{1}{r_1} a(r_1) = r_2^2(r_2 - r_1) \\
&= (7 + 4\sqrt{3})2\sqrt{3} = 24 + 14\sqrt{3} > 0, \\
\lambda_1(r_1) &= -\lambda_2(r_1) = -24 - 14\sqrt{3} < 0.
\end{aligned}$$

Die Singularität (r_1, φ_1) ist also hyperbolisch und $DX(r_1, \varphi_1)$ besitzt einen stabilen sowie einen instabilen invarianten Unterraum der Dimension 1. Nach dem Satz von Hartman und Grobman haben die Orbits von X in der Umgebung von (r_1, φ_1) die gleiche Struktur.

Die Eigenwerte von $DX(r_2, \varphi_2)$ berechnen wir analog, indem wir in der Rechnung r_1 und r_2 vertauschen. So erhalten wir

$$a(r_2) = r_1(r_1 - r_2), \quad b(r_2) = \frac{1}{r_2^2} a(r_2).$$

$DX(r_2, \varphi_2)$ besitzt die Eigenwerte

$$\begin{aligned}
\lambda_2(r_2) &= \sqrt{a(r_2)b(r_2)} = \frac{1}{r_2} a(r_2) = r_1^2(r_1 - r_2) \\
&= (7 - 4\sqrt{3})(-2\sqrt{3}) = 24 - 14\sqrt{3}, \\
\lambda_1(r_2) &= -\lambda_2(r_2) = -24 + 14\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Es gilt $\lambda_2(r_2) = r_1^2(r_1 - r_2) < 0$ und damit $\lambda_1(r_2) = -\lambda_2(r_2) > 0$.

Die Singularität (r_2, φ_2) ist also ebenfalls hyperbolisch und $DX(r_2, \varphi_2)$ besitzt einen stabilen sowie einen instabilen invarianten Unterraum der Dimension 1. Auch hier haben die Orbits von X nach dem Satz von Hartman und Grobman in einer Umgebung von (r_2, φ_2) die gleiche Struktur.

Nun betrachten wir das Anfangswertproblem

$$\dot{p} = DX(r, \varphi)p, \quad p(0) = p_0,$$

mit $p_0 = (r_0, \varphi_0) \in \mathbb{R}^2$. Es besitzt nach Satz 6.3.3 in [Aul] die Lösung $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$p(t) = e^{DX(r, \varphi)t} p_0.$$

Um p explizit zu berechnen, bestimmen wir den Eigenraum von $DX(r_1, \varphi_1)$ zum Eigenwert $\lambda_1(r_1)$,

$$\begin{aligned} \ker(DX(r_1, \varphi_1) - \lambda_1(r_1)I) &= \ker \begin{pmatrix} \sqrt{a(r_1)b(r_1)} & a(r_1) \\ b(r_1) & \sqrt{a(r_1)b(r_1)} \end{pmatrix} \\ &= \ker \begin{pmatrix} \sqrt{b(r_1)} & \sqrt{a(r_1)} \\ \sqrt{b(r_1)} & \sqrt{a(r_1)} \end{pmatrix} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{a(r_1)} \\ -\sqrt{b(r_1)} \end{pmatrix} \right\} \\ &= \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{a(r_1)} \\ -\frac{1}{r_1} \sqrt{a(r_1)} \end{pmatrix} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} r_1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \end{aligned}$$

sowie den Eigenraum zum Eigenwert $\lambda_2(r_1)$,

$$\begin{aligned} \ker(DX(r, \frac{\pi}{2}) - \lambda_2(r_1)I) &= \ker \begin{pmatrix} -\sqrt{a(r_1)b(r_1)} & a(r_1) \\ b(r_1) & -\sqrt{a(r_1)b(r_1)} \end{pmatrix} \\ &= \ker \begin{pmatrix} -\sqrt{b(r_1)} & \sqrt{a(r_1)} \\ -\sqrt{b(r_1)} & \sqrt{a(r_1)} \end{pmatrix} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{a(r_1)} \\ \sqrt{b(r_1)} \end{pmatrix} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} r_1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Analog erhalten wir die Eigenräume von $DX(r_2, \varphi_2)$ zu den Eigenwerten $\lambda_1(r_2)$ bzw. $\lambda_2(r_2)$,

$$\text{span} \left\{ \begin{pmatrix} r_2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{bzw.} \quad \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} r_2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Nun können wir $DX(r_1, \varphi_1)$ schreiben als

$$DX(r_1, \varphi_1) = SDS^{-1},$$

mit

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1(r_1) & 0 \\ 0 & \lambda_2(r_1) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S = \begin{pmatrix} r_1 & r_1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nach Satz 6.3.6 (b) in [Aul] ist $e^{SDS^{-1}t} = Se^{Dt}S^{-1}$.

Damit lässt sich die Lösung p des Anfangswertproblems

$$\dot{p} = DX(r_1, \varphi_1)p, \quad p(0) = p_0 \tag{3.6}$$

mit $p_0 = (r_0, \varphi_0) \in \mathbb{R}^2$ explizit darstellen,

$$\begin{aligned} p(t) &= e^{DX(r_1, \varphi_1)t} p_0 = Se^{Dt}S^{-1}p_0 \\ &= \begin{pmatrix} r_1 & r_1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\lambda_2(r_1)t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2(r_1)t} \end{pmatrix} \frac{1}{2r_1} \begin{pmatrix} 1 & -r_1 \\ 1 & r_1 \end{pmatrix} p_0 \\ &= \begin{pmatrix} r_1 e^{-\lambda_2(r_1)t} & r_1 e^{\lambda_2(r_1)t} \\ -e^{-\lambda_2(r_1)t} & e^{\lambda_2(r_1)t} \end{pmatrix} \frac{1}{2r_1} \begin{pmatrix} 1 & -r_1 \\ 1 & r_1 \end{pmatrix} p_0 \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(e^{\lambda_2(r_1)t} + e^{-\lambda_2(r_1)t}) & r_1 \frac{1}{2}(e^{\lambda_2(r_1)t} - e^{-\lambda_2(r_1)t}) \\ \frac{1}{r_1} \frac{1}{2}(e^{\lambda_2(r_1)t} - e^{-\lambda_2(r_1)t}) & \frac{1}{2}(e^{\lambda_2(r_1)t} + e^{-\lambda_2(r_1)t}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_0 \\ \varphi_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh(\lambda_2(r_1)t)r_0 + r_1 \sinh(\lambda_2(r_1)t)\varphi_0 \\ \frac{1}{r_1} \sinh(\lambda_2(r_1)t)r_0 + \cosh(\lambda_2(r_1)t)\varphi_0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

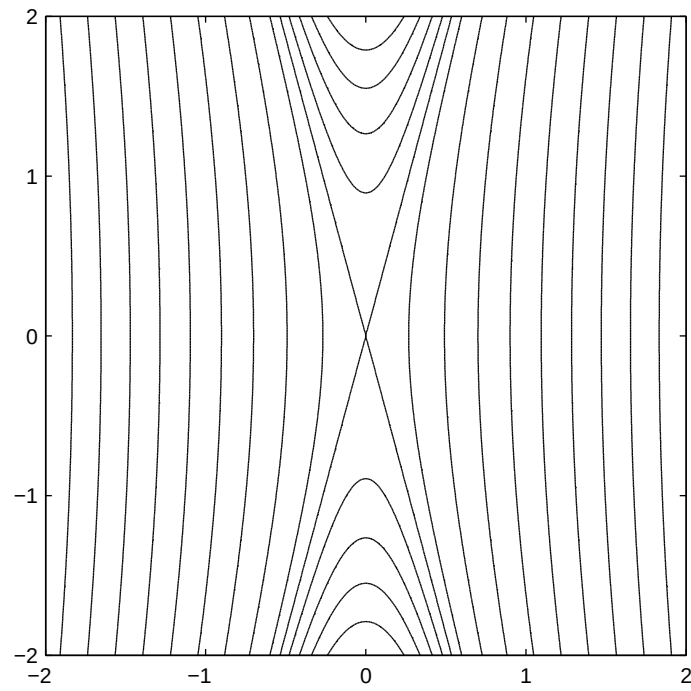


Abbildung 3.3: Lösungen von (3.6) zu verschiedenen Anfangswerten

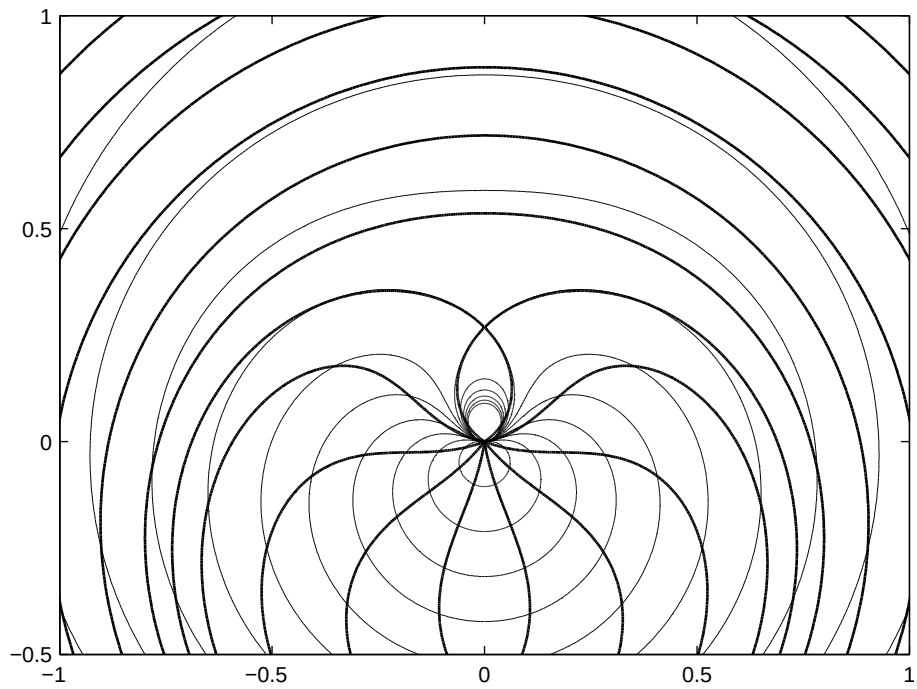


Abbildung 3.4: Orbits von v (dünne Linien) und Orbits seiner Linearisierung (dicke Linien) in der Nähe von (r_1, φ_1) im Vergleich

Analog berechnet sich die Lösung q des Anfangswertproblems

$$\dot{q} = DX(r_2, \varphi_2)q, \quad q(0) = (r_0, \varphi_0), \quad (3.7)$$

$$q(t) = \begin{pmatrix} \cosh(\lambda_2(r_2)t)r_0 + r_2 \sinh(\lambda_2(r_2)t)\varphi_0 \\ \frac{1}{r_2} \sinh(\lambda_2(r_2)t)r_0 + \cosh(\lambda_2(r_2)t)\varphi_0 \end{pmatrix}.$$

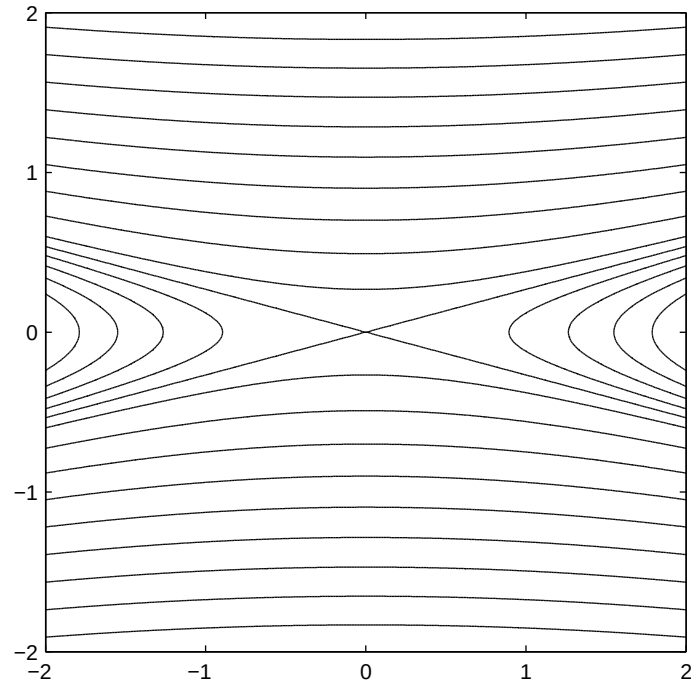


Abbildung 3.5: Lösungen von (3.7) zu verschiedenen Anfangswerten

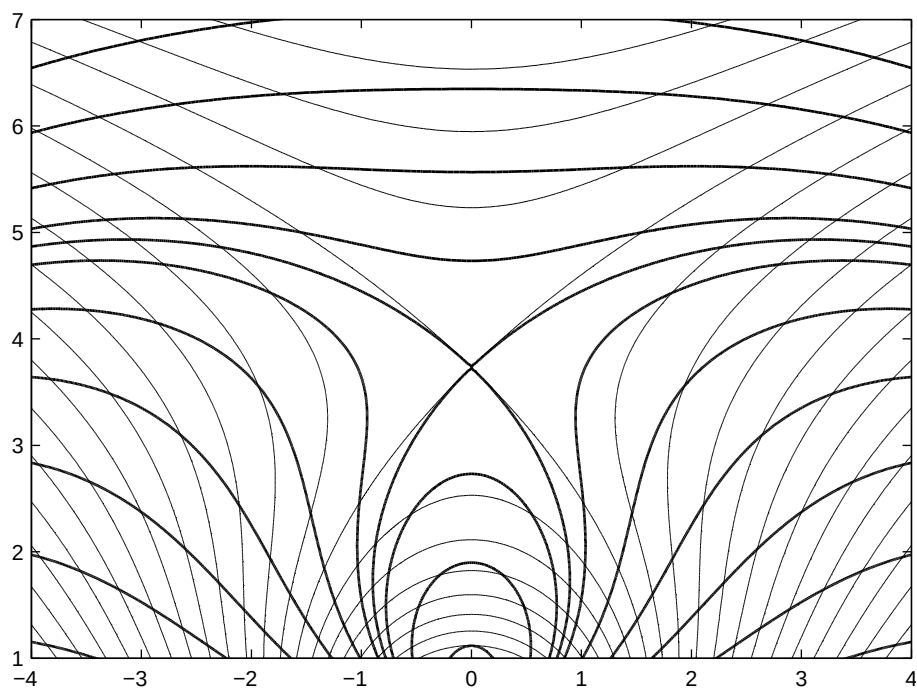


Abbildung 3.6: Orbits von v (dünne Linien) und Orbits seiner Linearisierung (dicke Linien) in der Nähe von (r_2, φ_2) im Vergleich

Literaturverzeichnis

- [Aul] Bernd Aulbach: *Gewöhnliche Differenzialgleichungen*, hrsg. v. Elsevier GmbH, München 2004, 2. Auflage
- [Bou] Donald E. Bourne/Peter C. Kendall: *Vektoranalysis*, übersetzt v. I. Fuchs, hrsg. v. B. G. Teubner, Stuttgart 1973
- [Gro] David M. Grobman: *Homeomorphisms of systems of differential equations*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 128, 1959, S. 880-881
- [Har1] Philip Hartman: *A lemma in the theory of structural stability of differential equations*, Proc. Amer. Math. Soc., 11 (4), Aug. 1960, S. 610-620
- [Har2] Philip Hartman: *On local homeomorphisms of Euclidean spaces*, Bol. Soc. Math. Mexicana, 5, 1960, S. 220-241
- [Mar] Carlo Marchioro/Mario Pulvirenti: *Mathematical Theory of Incompressible Nonviscous Fluids*, hrsg. v. Springer-Verlag, New York u. a. 1994
- [Pal] Jacob Palis, Jr./Wellington de Melo: *Geometric Theory of Dynamical Systems. An Introduction*, übersetzt v. A. K. Manning, hrsg. v. Springer-Verlag, New York u. a. 1982